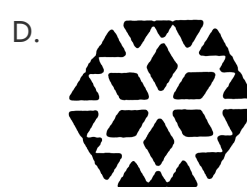


第1讲 旋转的概念及性质（加油站）

一、旋转与中心对称

练习1

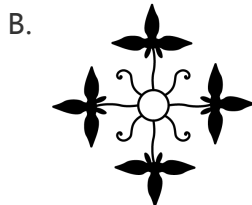
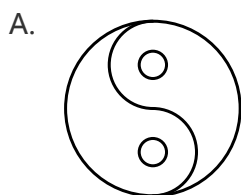
1. 下列图案中，既是中心对称图形又是轴对称图形的是（ ）。



2. 下列标志图中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）。



3. 民族图案是数学文化中的一块瑰宝。下列图案中，既不是中心对称图形也不是轴对称图形的是（ ）。

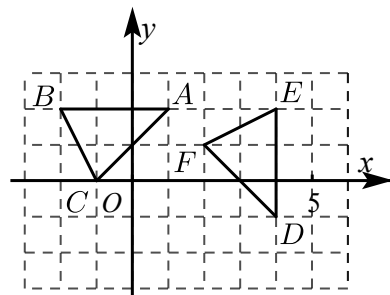


4. 下列图形中，可以看作是中心对称图形的是（ ）。



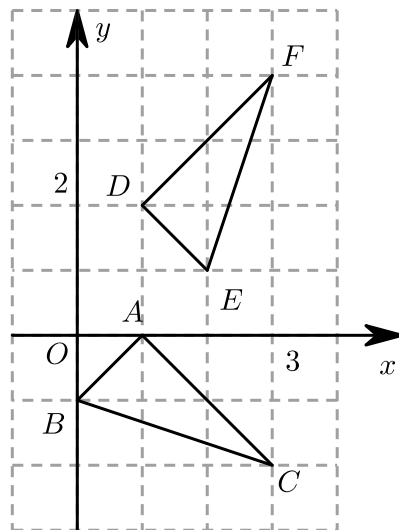
练习2

5. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle ABC$ 顶点的横、纵坐标都是整数．若将 $\triangle ABC$ 以某点为旋转中心，顺时针旋转 90° 得到 $\triangle DEF$ ，则旋转中心的坐标是（ ）。



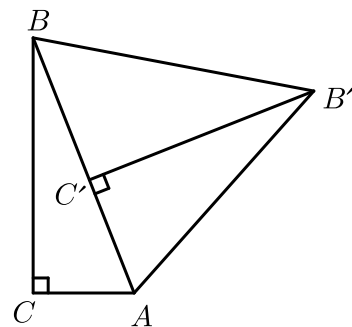
- A. $(0, 0)$ B. $(1, 0)$ C. $(1, -1)$ D. $(2.5, 0.5)$

6. 如图， $\triangle DEF$ 是由 $\triangle ABC$ 绕着某点旋转得到的，则这点的坐标是（ ）。

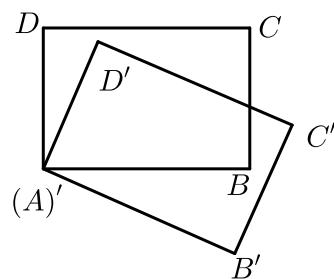


- A. $(1, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(2, 0)$

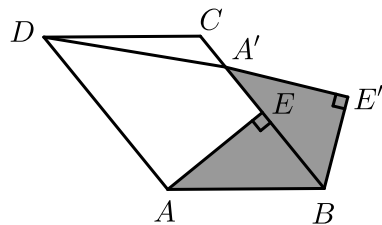
10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 70^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 70° ， B 、 C 旋转后的对应点分别是 B' 和 C' ，连接 BB' ，则 $\angle BB'C'$ 的度数是（ ）。



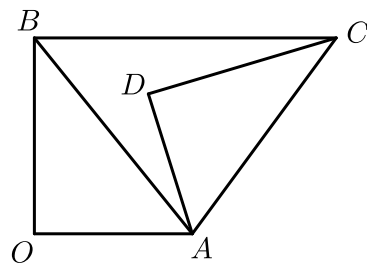
- A. 35° B. 40° C. 45° D. 50°
11. 如图，将矩形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转到矩形 $A'B'C'D'$ 的位置，旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，若 $\angle BAD' = 70^\circ$ ，则 $\alpha =$ _____ (度)。



12. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ，以点 B 为中心，取旋转角等于 $\angle ABC$ ，把 $\triangle BAE$ 顺时针旋转，得到 $\triangle BA'E'$ ，连接 DA' 。若 $\angle ADC = 60^\circ$ ， $\angle ADA' = 50^\circ$ ，则 $\angle DA'E'$ 的大小为 _____ (度)。



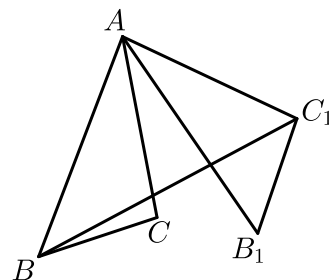
13. 如图，在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $\angle O = 90^\circ$ ，以点 A 为旋转中心，把 $\triangle ABO$ 顺时针旋转得 $\triangle ACD$ ，记旋转角为 α ， $\angle ABO$ 为 β ，当旋转后满足 $BC \parallel OA$ 时， α 与 β 之间的数量关系为（ ）。



- A. $\alpha = \beta$ B. $\alpha = 2\beta$ C. $\alpha + \beta = 90^\circ$ D. $\alpha + 2\beta = 180^\circ$

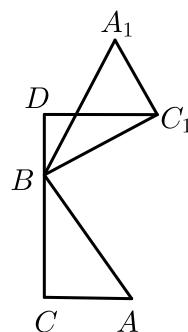
练习4

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， $AC = 3$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AB_1C_1$ ，连接 BC_1 ，则 BC_1 的长为（ ）。

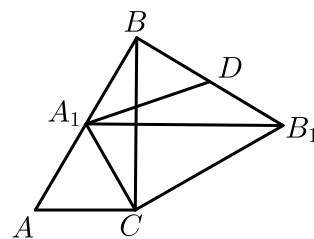


- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

15. 如图， $\triangle ACB$ 中， $BC = 4$ ，将 $\triangle ACB$ 绕点 B 逆时针旋转 120° ，得到 $\triangle A_1C_1B$ ，过点 C_1 作 $C_1D \perp CB$ ，与 CB 的延长线交于点 D ，则 BD 的长等于 _____。

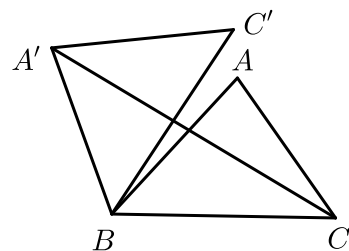


16. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 2$ ， $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得 $\triangle A_1B_1C$ ，当 A_1 落在 AB 边上时，连接 B_1B ，取 BB_1 的中点 D ，连接 A_1D ，则 A_1D 的长度是（ ）。

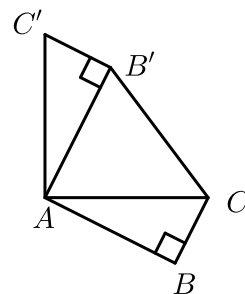


- A. $\sqrt{7}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $2\sqrt{3}$

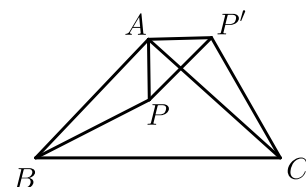
17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle A'BC'$ ，连接 $A'C$ ，则 $A'C$ 的长为（ ）。



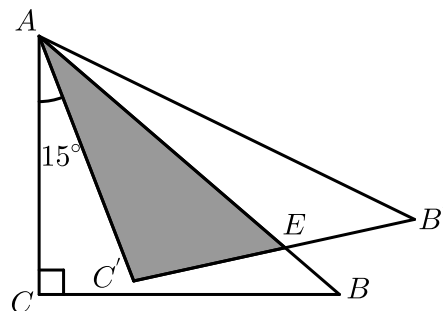
- A. 6 B. $4 + 2\sqrt{3}$ C. $4 + 3\sqrt{3}$ D. $2 + 3\sqrt{3}$
18. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{5}$ ， $BC = \sqrt{5}$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle AB'C'$ ，连接 $B'C$ ，则 CB' 的长度为 _____。



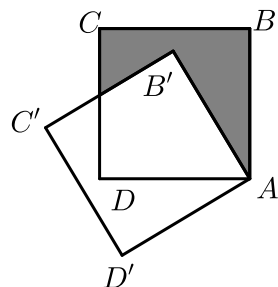
19. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转后，能与 $\triangle ACP'$ 重合，如果 $AP = 3$ ，那么 PP' 的长等于（ ）。



- A. $3\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{3}$
20. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，将其绕点 A 逆时针旋转 15° 得到 $\text{Rt}\triangle AB'C'$ ， $B'C'$ 交 AB 于 E ，若图中阴影部分面积为 $2\sqrt{3}$ ，则 $B'E$ 的长为 _____。

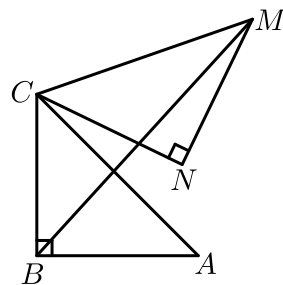


21. 如图，边长为1的正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 到正方形 $AB'C'D'$ ，图中阴影部分的面积为（ ）。

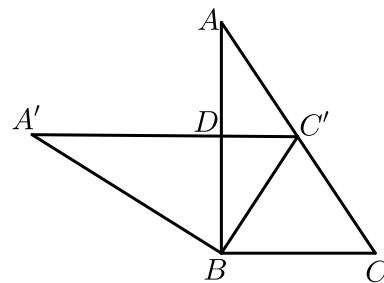


- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$

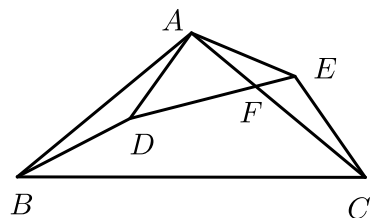
22. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC = \sqrt{2}$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 60° ，得到 $\triangle MNC$ ，连接 BM ，则 BM 的长是_____。



23. 如图，两块相同的三角板完全重合在一起， $\angle A = 30^\circ$ ， $AC = 10$ ，把上面一块绕直角顶点 B 逆时针旋转到 $\triangle A'BC'$ 的位置，点 C' 在 AC 上， $A'C'$ 与 AB 相交于点 D ，则 $C'D =$ _____。

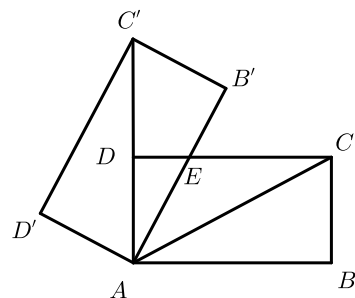


24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 6$ ，点 D 为 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle BAD = 15^\circ$ ， $AD = 3$ ，连接 BD ，将 $\triangle ABD$ 绕点 A 按逆时针方向旋转，使 AB 与 AC 重合，点 D 的对应点为点 E ，连接 DE 交 AC 于点 F ，则 AF 的长为（ ）。



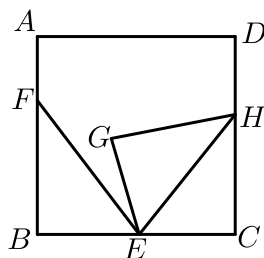
- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{6}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$

25. 如图，将矩形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转至矩形 $AB'C'D'$ 的位置，点 B 的对应点是点 B' ，点 C 的对应点是点 C' ，点 C' 在 AD 的延长线上， AB' 交 CD 于点 E ．若 $AE = CE = 4$ ，则 AC 的长为（ ）．



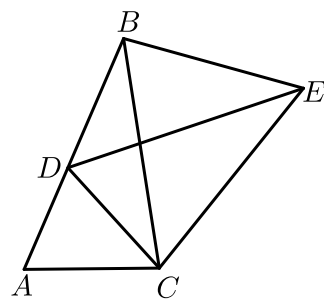
- A. $2\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. 2 D. 4

26. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在 BC 和 AB 上， $BE = 3$ ， $AF = 2$ ， $BF = 4$ ，将 $\triangle BEF$ 绕点 E 顺时针旋转，得到 $\triangle GEH$ ，当点 H 落在 CD 边上时， F, H 两点之间的距离为 _____ ．



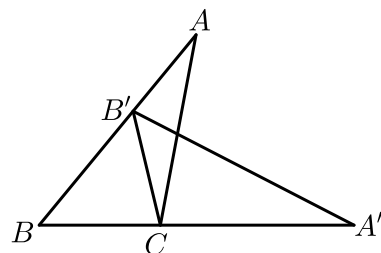
练习5

27. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle DEC$ ，使点 A 的对应点 D 恰好落在边 AB 上，点 B 的对应点为 E ，连接 BE ，下列结论一定正确的是（ ）．



- A. $AC = AD$ B. $AB \perp EB$ C. $BC = DE$ D. $\angle A = \angle EBC$

28. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转，使点 B 落在 AB 边上点 B' 处，此时，点 A 的对应点 A' 恰好落在 BC 边的延长线上，下列结论错误的是（ ）。

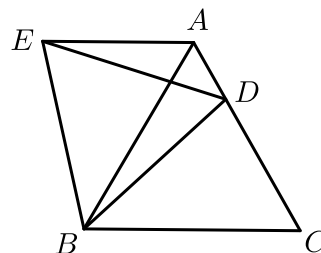


- A. $\angle BCB' = \angle ACA'$ B. $\angle ACB = 2\angle B$ C. $\angle B'CA = \angle B'AC$ D. $B'C$ 平分 $\angle BB'A'$

29. 在等边三角形 ABC 中， D 是边 AC 上一点，连接 BD ，将 $\triangle BCD$ 绕点 B 逆时针旋转 60° ，得到 $\triangle BAE$ ，连接 ED ，若 $BC = 5$ ， $BD = 4$ 有下列结论：

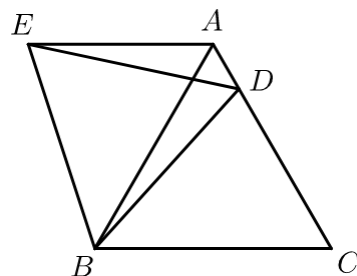
- ① $AE \parallel BC$
 ② $\angle ADE = \angle BDC$
 ③ $\triangle BDE$ 是等边三角形
 ④ $\triangle ADE$ 的周长是9

其中正确的有（ ）个。



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

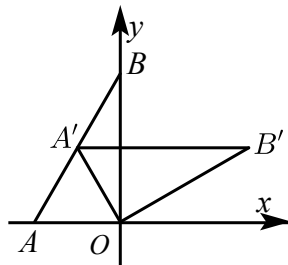
30. 在等边 $\triangle ABC$ 中， D 是边 AC 上一点，连接 BD ，将 $\triangle BCD$ 绕点 B 逆时针旋转 60° ，得到 $\triangle BAE$ ，连接 ED ，若 $BC = 5$ ， $BD = 4$ ，则以下四个结论中：① $\triangle BDE$ 是等边三角形；② $AE \parallel BC$ ；③ $\triangle ADE$ 的周长是9；④ $\angle ADE = \angle BDC$ 。其中正确的序号是（ ）。



- A. ②③④ B. ①③④ C. ①②④ D. ①②③

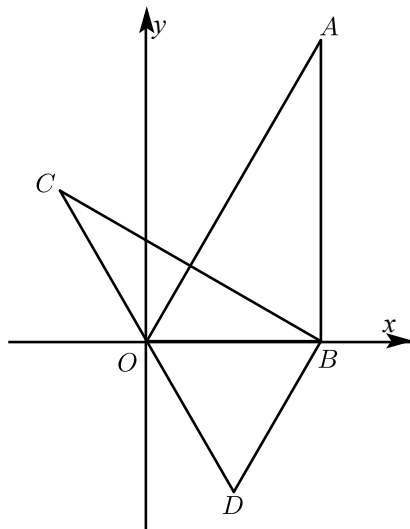
练习6

31. 如图，在平面直角坐标系中，点 B 的坐标为 $(0, 3)$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ 。将 $\triangle AOB$ 绕点 O 顺时针旋转一定角度后得到 $\triangle A'OB'$ ，并且点 A' 恰好落到线段 AB 上，则点 A' 的坐标为（ ）。

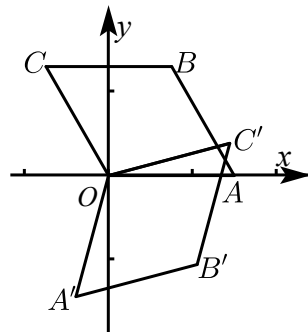


- A. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

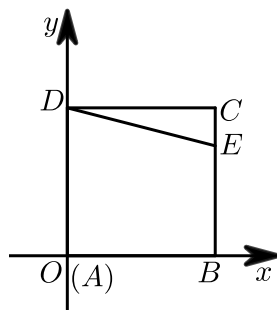
32. 如图，在直角坐标系中，点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$ ， $AB \perp x$ 轴于 B ，将 $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle CBD$ ，则点 C 的坐标是 _____。



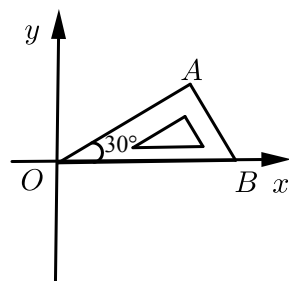
33. 如图，菱形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点，顶点 A 在 x 轴上， $\angle B = 120^\circ$ ， $OA = 2$ ，将菱形 $OABC$ 绕原点顺时针旋转 105° 至 $OA'B'C'$ 的位置，则点 B' 的坐标为 _____。



34. 如图，正方形 $ABCD$ 的两条邻边分别在 x 、 y 轴上，点 E 在 BC 边上， $AB = 4$ ， $BE = 3$ ，若将 $\triangle CDE$ 绕点 D 按顺时针方向旋转 90° ，则点 E 的对应点的坐标为 _____ 。



35. 将含有 30° 角的直角三角板 OAB 如图放置在平面直角坐标系中， OB 在 x 轴上，若 $OA = 2$ ，将三角板绕原点 O 顺时针旋转 75° ，则点 A 的对应点 A' 的坐标为 () 。



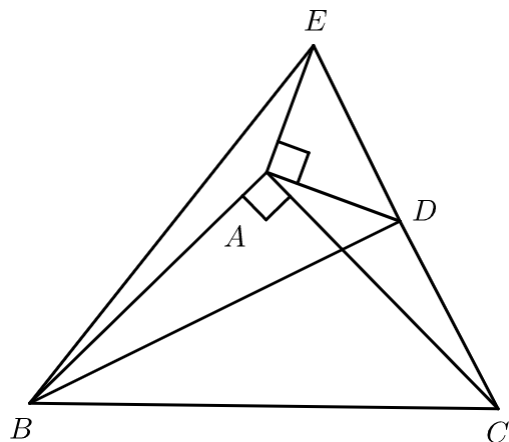
- A. $(\sqrt{3}, -1)$ B. $(1, -\sqrt{3})$ C. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ D. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

二、旋转之手拉手模型

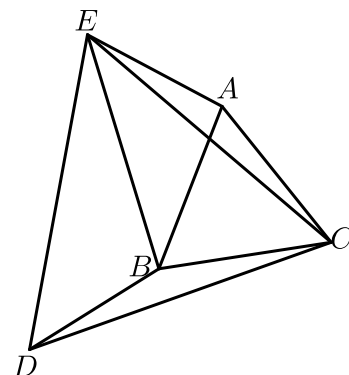
1. “手拉手”模型正用

练习7

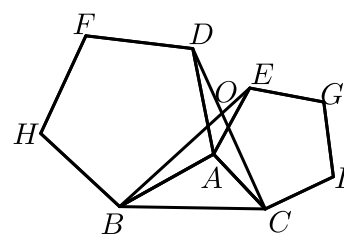
36. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，点 C ， D ， E 三点在同一条直线上，连接 BD ， BE 。则 $\angle BDC =$ _____ $^\circ$ 。



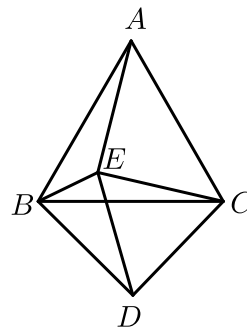
37. 如图，设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，若 $\angle AEB = 70^\circ$ ，则 $\angle EBD = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.



38. 在 $\triangle ABC$ 中，分别以 AB ， AC 为边，向 $\triangle ABC$ 外作正五边形， BE 、 CD 相交于点 O . $\angle BOC = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.



39. 如图，设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，且 $\angle EBD = 65^\circ$ ，则 $\angle AEB$ 的度数是（ ） .



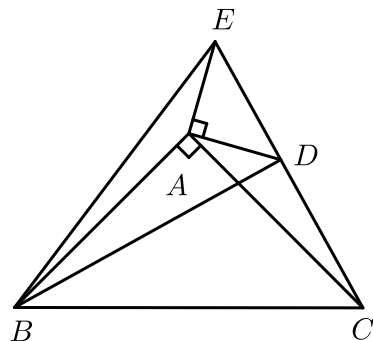
A. 115°

B. 120°

C. 125°

D. 130°

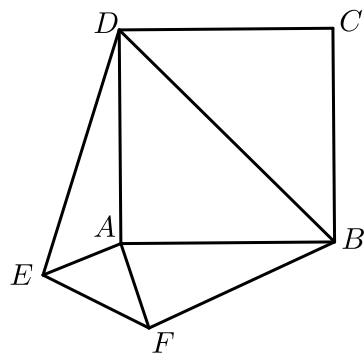
40. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， C ， D ， E 三点在同一条直线上，连接 BD ， BE 。以下四个结论：① $BD = CE$ ；② $\angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$ ；③ $BD \perp CE$ ；④ $\angle BAE + \angle DAC = 180^\circ$ 。其中结论正确的个数是（ ）。



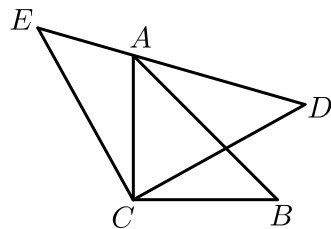
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

练习8

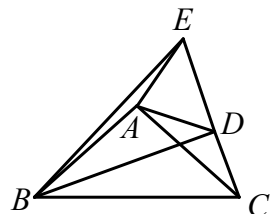
41. 如图，在边长为3的正方形 $ABCD$ 的外部作等腰 $\text{Rt}\triangle AEF$ ， $AE = 1$ ，连接 DE ， BF ， BD ，则 $DE^2 + BF^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



42. 如图， $\triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形， $CA = CB$ ， $CE = CD$ ， $\triangle ABC$ 的顶点 A 在 $\triangle ECD$ 的斜边上，若 $AE = \sqrt{3}$ ， $AD = \sqrt{7}$ ，则 AC 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



43. 已知：如图在 $\triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，点 C ， D ， E 三点在同一条直线上，连接 BD ， BE ．以下四个结论：① $BD = CE$ ；② $BD \perp CE$ ；③ $\angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$ ；④ $BE^2 = 2(AD^2 + AB^2)$ ；其中正确结论的个数是（ ）．



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

44. 如图(1)已知 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，将 $\triangle ADE$ 顺时针旋转得到图(2)时，连结 BD 和 CE ，再将 BD 、 CE 分别延长至 M 、 N ，使 $DM = \frac{1}{2}BD$ ， $EN = \frac{1}{2}CE$ ，得到图(3)，请解答下列问题．

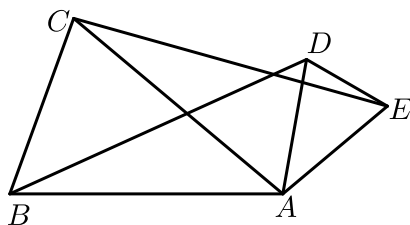


图 (2)

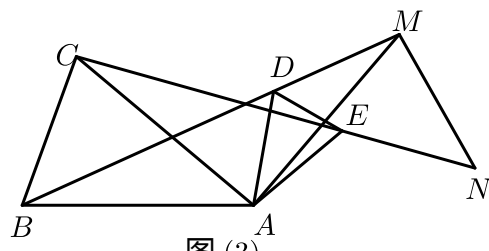


图 (3)

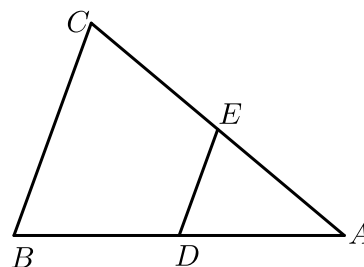
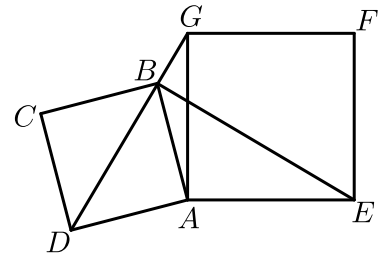


图 (1)

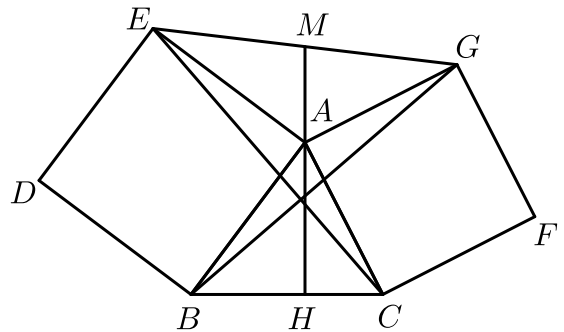
- (1) 在图(1)中， BD 与 CE 的数量关系是 _____ ．
 (2) 在图(2)中，猜想 BD 与 CE 的数量关系，并证明你的猜想．
 (3) 在图(3)中，直接写出 AM 与 AN 的数量关系， $\angle MAN$ 与 $\angle BAC$ 的数量关系．

练习9

45. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为2，正方形 $AEFG$ 的边长为 $2\sqrt{2}$ ，点 B 在线段 DG 上，则 BE 的长为 _____ .



46. 在锐角三角形 ABC 中， AH 是 BC 边上的高，分别以 AB ， AC 为一边，向外作正方形 $ABDE$ 和正方形 $ACFG$ ，连接 CE 、 BG 和 EG ， EG 与 HA 的延长线交于点 M ，下列结论：① $BG = CE$ ；② $BG \perp CE$ ；③ AM 是 $\triangle AEG$ 的中线；④ $\angle EAM = \angle ABC$ ，其中正确结论的有 _____（填序号）.



47. 感知：如图1，正方形 $OABC$ 与正方形 $ODEF$ 中，当点 F 、 O 、 A 三点共线时连接 AD 、 CF ，易证 $\triangle AOD \cong \triangle COF$ ，则 $AD = CF$ ， $AD \perp CF$ （不要求证明）。

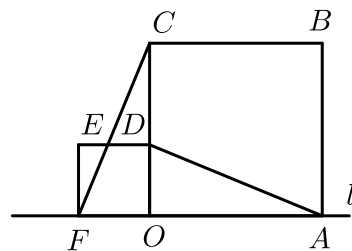


图1

- (1) 探究：如图2，正方形 $ODEF$ 绕点 O 逆时针旋转一定角度，试判断 $AD = CF$ ， $AD \perp CF$ 是否依然成立。若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由。

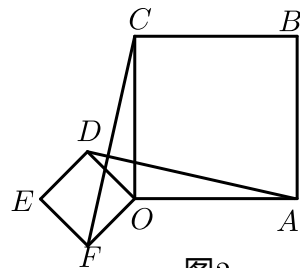


图2

- (2) 应用：如图3，已知 $AO = 4$ ， $OD = \sqrt{2}$ ，正方形 $ODEF$ 绕点 O 逆时针旋转，当 E 、 O 、 A 三点共线时，连接 AC 、 CD 、 DF 、 AF ，则四边形 $ACDF$ 的面积为 _____。

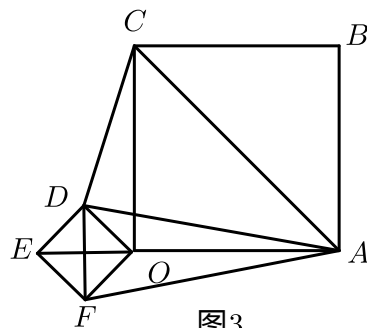


图3

48. 如图1，若四边形 $ABCD$ 、 $GFED$ 都是正方形，显然图中有 $AG = CE$ ， $AG \perp CE$ 。

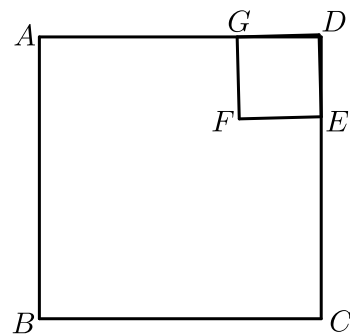


图 1

- (1) 当正方形 $GFED$ 绕 D 旋转到如图2的位置时， $AG = CE$ 是否成立？若成立，请给出证明，若不成立，请说明理由。

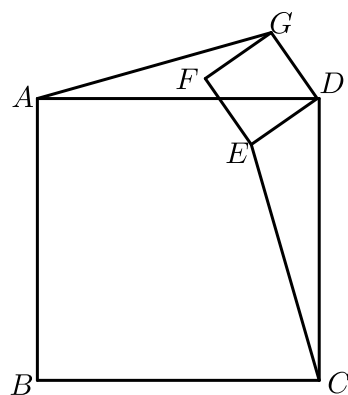
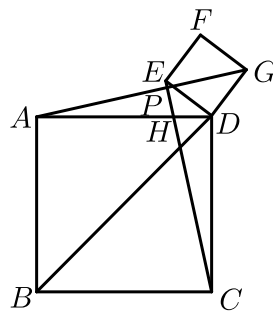


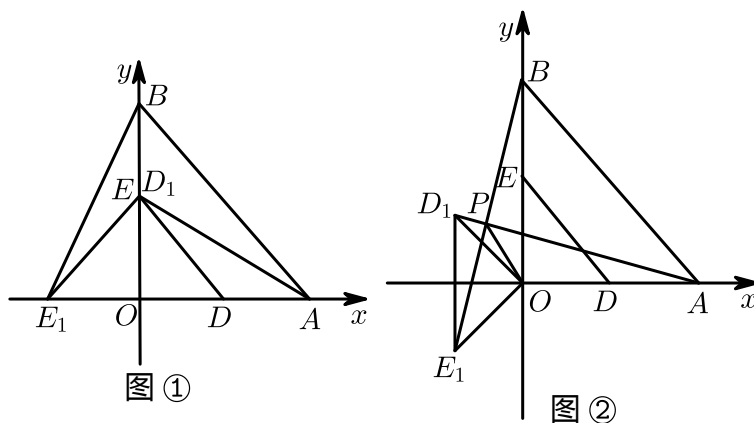
图 2

- (2) 当正方形 $GFED$ 绕 D 旋转到 B, D, G 在一条直线（如图3）上时，连结 CE ，设 CE 分别交 AG 、 AD 于 P 、 H 。



- ① 求证： $AG \perp CE$ 。
- ② 如果 $AD = 4$ ， $DG = \sqrt{2}$ ，求 CE 的长。

49. 已知，在平面直角坐标系中， $A(4,0)$ ， $B(0,4)$ ，点 D 、 E 分别为 OA 、 OB 的中点，将 $\triangle ODE$ 绕点 O 逆时针旋转一定角度，得到 $\triangle OD_1E_1$ ，设旋转角为 α ，记直线 AD_1 与 BE_1 的交点为 P 。

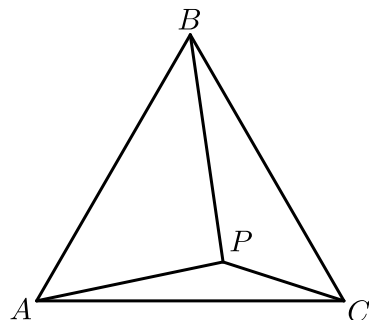


- (1) 如图①， $\alpha = 90^\circ$ ，则点 D_1 的坐标是 _____，线段 AD_1 的长等于 _____，点 E_1 的坐标是 _____，线段 BE_1 的长等于 _____。
- (2) 如图②， $\alpha = 135^\circ$ 。
- ① 求 $\angle APO$ 的大小。
 - ② 求 $\frac{PD_1}{PB}$ 的值。（直接写出结果即可）

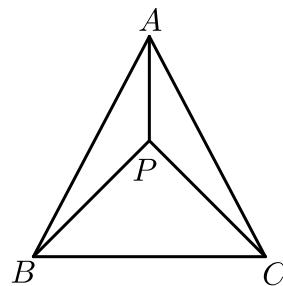
2. “手拉手”模型逆用

练习10

50. 如图所示， P 是等边 $\triangle ABC$ 内部一点， $PC = 3$ ， $PA = 4$ ， $PB = 5$ ，求 $\triangle ABC$ 的边长。



51. 如图， P 是等腰 $\triangle ABC$ 内一点， $AB = BC$ ，连接 PA ， PB ， PC 。



(1) 如图1，当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时，将 $\triangle PAB$ 绕 B 点顺时针旋转 90° ，画出旋转后的图形。

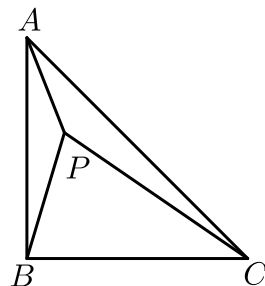


图1

(2) 在(1)中，若 $PA = 2$ ， $PB = 4$ ， $PC = 6$ ，求 $\angle APB$ 的大小。

(3) 如图2， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = AC$ ，且 $PA = 3$ ， $PB = 4$ ， $PC = 5$ ，则 $\triangle APC$ 面积是 _____。

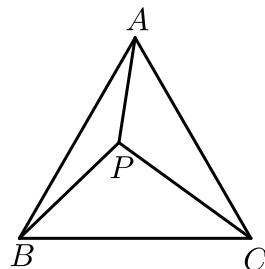


图2

(4) 如图3， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $AB = 2AC$ 。点 P 在 $\triangle ABC$ 内，且 $PA = \sqrt{3}$ ， $PB = 5$ ， $PC = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

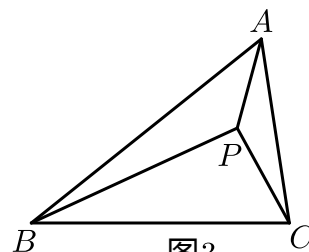


图3

52. 请回答下列各题

- (1) 如图1, 在正方形 $ABCD$ 内有一点 P , 且 $PA = \sqrt{5}$, $PB = \sqrt{2}$, $PC = 1$. 求 $\angle BPC$ 度数的大小和正方形 $ABCD$ 的边长.

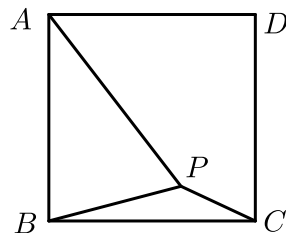


图 1

- (2) 如图2, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 是 BC 上的任意一点, 探究:
 BD , CD 与 AD 的关系, 并证明你的结论.

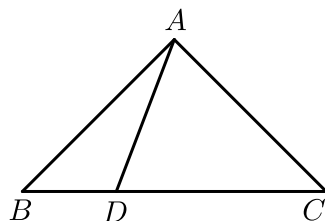


图 2

- (3) 如图3, 四边形 $ABCD$ 被对角线 BD 分为等腰直角 $\triangle ABD$ 和直角 $\triangle CBD$, 其中 $\angle A$ 和 $\angle C$ 都是直角, 另一条对角线 AC 的长度为2, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

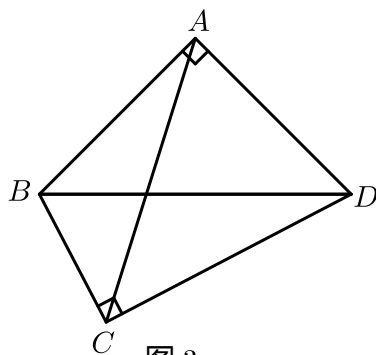


图 3